

# 非有向 Lefschetz ファイバー空間の向き付け二重被覆 について

岡山大学大学院環境生命自然科学研究科 環境生命自然科学専攻  
好川智也 (Tomoya Yoshikawa) \*

## 概要

Lefschetz 型とよばれる特異ファイバーを有限個許容する曲面上のファイバー空間を, Lefschetz ファイバー空間という. 現在においても, Lefschetz ファイバー空間を活用した有向な 3・4 次元多様体の研究は活発に行われているが, その一方で近年, Lefschetz ファイバー空間を用いて非有向 4 次元多様体を研究しようとする動きがある. 本稿では, Lefschetz ファイバー空間の基本事項を解説した後, 非有向 Lefschetz ファイバー空間とその向き付け二重被覆をとつて得られる Lefschetz ファイバー空間の関係性に着目して, 2 つの非有向 Lefschetz ファイバー空間が同型であるための必要十分条件について述べる.

## 1 導入

Lefschetz ファイバー空間とは, もともと射影代数多様体のトポロジーを調べる際に Lefschetz が導入した Lefschetz ペンシルを, 有限回ブローアップして得られるファイバー空間である. Lefschetz ファイバー空間が多くの研究者を惹きつける理由は多岐にわたる. Donaldson[5], Gompf[11] らは Lefschetz ファイバー空間とシンプレクティック構造を関係づけ, Akbulut と Ozbagci[1], Loi と Piergallini[13], および Giroux と Pardon[10] らは Lefschetz ファイバー空間と Stein 領域の関係づけを行った. その一方で, Lefschetz ファイバー空間は曲面の写像類群の生成元である Dehn ツイストたちの積により構成することができるという事実がある. これらをまとめると, 写像類群にて行われる組合せ的な議論は Lefschetz ファイバー空間を経由することで, 3・4 次元トポロジーでの議論に落とし込むことが可能であり, この事実から理解されるように, Lefschetz ファイバー空間は非常興味深い幾何学的対象である.

上で述べたように, Lefschetz ファイバー空間はシンプレクティック構造や Stein 構造の組合せ的な研究を可能にする存在であるが, そのほかに写像類群での議論によるエキゾチック有向 4 次元多様体の組合せ的な構成にも有用である. Kas[12] と松本幸夫氏 [15] は, 任意に与えられた 2 つの(有向) Lefschetz ファイバー空間が同型であるための必要十分条件を, それらのモノドロミー分解における 3 つの変換によって記述した(本稿の定理 4.2 を参照). また, 松本氏 [14], [15], 遠藤久顕氏 [6], および Ozbagci[17] らにより, Lefschetz ファイバー空間の情報から 4 次元多様体の符号数を計算するアルゴリズムが確立された. さらに, [7] および [8] では, モノドロミー分解に現れる Dehn ツ

---

\* E-mail:p4bd8ad0@s.okayama-u.ac.jp

イストをランタン関係式, およびデイジー関係式で置き換えることは Lefschetz ファイバー空間の全空間である有向 4 次元多様体に, 有理ブローダウン (cf.[9]) を施すことに対応することが証明されている. これらの結果は, Lefschetz ファイバー空間による十分に多くのエキゾチック有向 4 次元多様体の構成に貢献している.

さて近年, 非有向な 4 次元多様体を Lefschetz ファイバー空間を用いて研究しようとする動きがある (例えは, [16], [2], [3]). 向き付け可能な状況を踏まえると, Lefschetz ファイバー空間が非有向 4 次元多様体の組合せ的研究に貢献することが期待されているが, そのような研究はほとんど実行されていないように思われる. 筆者はこれまで, Lefschetz ファイバー空間を介した非有向 4 次元多様体の組合せ的研究の確立を目指し, そのための土台作りを行ってきた. 本稿では, その際に得られたいくつかの結果について述べる. 詳細は [19] を参照していただきたい.

**記号について** : 本稿を通して,  $\Sigma_g$ ,  $N_g$  をそれぞれ, 向き付け可能, 向き付け不可能である種数  $g$  の連結で滑らかな閉曲面とする. 特に, 2 次元円板と 2 次元球面はそれぞれ  $\mathbb{D}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  と表記する. 本稿では  $N_{2g+1}$  を,  $\Sigma_g$  から開円板を 1 つ切り取り, その際できた曲面上の境界に沿って Möbius の帯を貼り合わせて得られる曲面と同一視する. 同様に,  $N_{2g+2}$  を,  $\Sigma_g$  から開円板を 2 つ切り取り, その際できた曲面上の境界に沿って 2 つの Möbius の帯を貼り合わせて得られる曲面と同一視する.  $N_g$  上の Möbius の帯は  $\otimes$  という図で表され, クロスキヤップとよばれる (図 5 参照).  $N_g$  上の単純閉曲線がアニュラス型であるとは, その  $N_g$  における管状近傍がアニュラスと微分同相であるときをいう. また, 滑らかな多様体の間の滑らかな写像  $F$  に対して,  $F$  の臨界点全体の集合を  $\text{Crit}(F)$  で, 臨界点全体の集合の  $F$  による像を  $\Delta_F := F(\text{Crit}(F))$  で表すこととする.

## 2 Lefschetz ファイバー空間の定義

本節では Lefschetz ファイバー空間とそれに関する用語を定義する. 詳しい解説は, [11], [20], [21] などを参照されたい.

**定義 2.1.**  $X$  を連結かつコンパクトで滑らかな 4 次元多様体,  $\Sigma$  を向き付けられた連結かつコンパクトで滑らかな 2 次元多様体とし,  $f : X \rightarrow \Sigma$  を滑らかな写像とする. 3 つの組  $(X, \Sigma, f)$  が次の 3 つの性質 (LF1)-(LF3) を満たすとき, これを **Lefschetz ファイバー空間** という :

- (LF1)  $\partial X = f^{-1}(\partial \Sigma)$  ;
- (LF2)  $\text{Crit}(f) \subset \text{Int}(X)$  ;
- (LF3) 各点  $x \in \text{Crit}(f)$  に対して,  $x$  まわりの複素座標チャート  $(U, \varphi)$  と,  $f(x)$  まわりの複素座標チャート  $(V, \psi)$  で, 任意の  $(z, w) \in \varphi(U) \subset \mathbb{C}^2$  に対して

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z, w) = zw$$

を満たすものが存在する.

$X$  および  $\Sigma$  は, それぞれ Lefschetz ファイバー空間  $(X, \Sigma, f)$  の全空間, 底空間とよばれる.

Lefschetz ファイバー空間  $(X, \Sigma, f)$  が**有向**であるとは,  $X$  が向き付け可能であるときをいう. いま,  $(X, \Sigma, f)$  を有向 Lefschetz ファイバー空間とする.  $f$  の任意の臨界点において, 定義 2.1(LF3)

を満たし, かつ局所座標系が向きを保つ写像であるような複素座標チャートがとれるとき,  $(X, \Sigma, f)$  は **キラル**であるという (ここで,  $\mathbb{C}^2$  は複素多様体なので, 特に概複素構造をもち, それによって  $\mathbb{C}^2$  には向きが自然に定まるが,  $\varphi(U) \subset \mathbb{C}^2$  には  $\mathbb{C}^2$  がもつこの向きから誘導される向きが入っていることに注意する). 逆に, 定義 2.1(LF3) を満たし, かつ向きを保たない局所座標系をもつ複素座標チャートがとれるような  $f$  の臨界点が存在するとき,  $(X, \Sigma, f)$  は **アキラル**であるという.  $x \in \text{Crit}(f)$  が **正**の臨界点であるとは, 定義 2.1(LF3) を満足する  $x$  まわりの複素座標チャート  $(U, \varphi)$  の局所座標系  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  が向きを保つときをいう. また,  $x \in \text{Crit}(f)$  が **負**の臨界点であるとは, 定義 2.1(LF3) を満足する  $x$  まわりの複素座標チャート  $(U, \varphi)$  の局所座標系  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  が向きを保たないときをいう.  $f$  の各正則値の  $f$  による逆像は,  $(X, \Sigma, f)$  の **正則ファイバー**とよばれる. Ehresmann のファイバー束定理より  $(f^{-1}(\Sigma - \Delta_f), \Sigma - \Delta_f, f|_{f^{-1}(\Sigma - \Delta_f)})$  は曲面束になることが従い, よってこのことから, 正則ファイバーはある種数  $g$  をもつ曲面  $\Sigma_g$  と微分同相であることが分かる. この  $g \geq 0$  を  $(X, \Sigma, f)$  の **種数**という. なお,  $f$  の各臨界値の  $f$  による逆像は,  $(X, \Sigma, f)$  の **特異ファイバー**とよばれる.

一方で, Lefschetz ファイバー空間  $(X, \Sigma, f)$  が **非有向**であるとは,  $X$  が向き付け不可能であるときをいう. 非有向 Lefschetz ファイバー空間に関しても正則ファイバー, 特異ファイバー, および種数が同様に定義されるが, この場合, 各正則ファイバーは  $N_g$  ( $g \geq 1$ ) と微分同相であることに注意する.

**注意 2.2.** Lefschetz ファイバー空間  $(X, \Sigma, f)$  の各臨界点のまわりが定義 2.1(LF3) のような様子になっていること, および  $X$  のコンパクト性により, Lefschetz ファイバー空間の臨界点は高々有限個であることが分かる. また, 必要なら  $f$  を少し摂動することによって, 制限写像  $f|_{\text{Crit}(f)}$  が单射である, すなわち,  $(X, \Sigma, f)$  の各特異ファイバーはただ 1 つの臨界点をもつようにすることができる.

以降, Lefschetz ファイバー空間  $(X, \Sigma, f)$  を単に,  $f : X \rightarrow \Sigma$  と略記することにする.

### 3 Lefschetz ファイバー空間の消滅サイクルとモノドロミー

本節を通して,  $S_g$  を  $\Sigma_g$ ,  $N_g$  のいずれかであるとする.

#### 3.1 特異ファイバーの様子と消滅サイクル

いま, Lefschetz ファイバー空間  $f : X \rightarrow \Sigma$  の底空間  $\Sigma$  上に, 始点が正則値, 終点が臨界値で, 終点以外は臨界値を通らないような道  $\mu$  をとる. この道に沿って, 全空間内にある正則ファイバーを動かすと, 正則ファイバー内のある単純閉曲線は次第に小さくなっていき, 終点である特異ファイバーに到着すると, この単純閉曲線は一点に潰れる (図 1 参照. なお, 潰れた点は  $f$  の臨界点に一致する). このような単純閉曲線を  $\mu$  から定まる **消滅サイクル**という (前節でも述べたように正則ファイバーは閉曲面と微分同相であるが, この微分同相写像を任意に 1 つ固定し, それによる消滅サイクルの閉曲面への像もまた, 消滅サイクルという). なお, 消滅サイクルのアイソトピー類は上でとったような正則値から臨界値への道の, 端点を止めたホモトピー類に対して一意的に定まる.

すべての消滅サイクルが閉曲面に埋め込まれた円板の境界になっていないような有向 Lefschetz

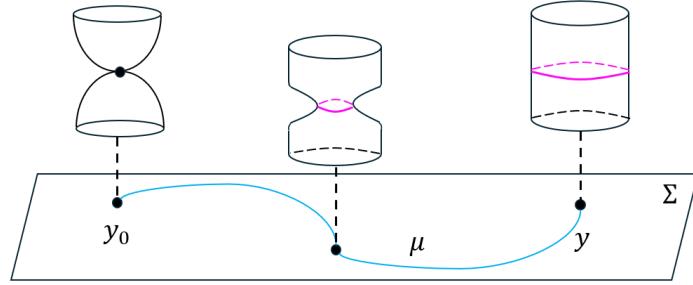


図 1: 消滅サイクルの様子 (ただし, 点  $y$  は  $f$  の正則値, 点  $y_0$  は  $f$  の臨界値である).

ファイバー空間, またはすべての消滅サイクルが閉曲面に埋め込まれた円板, および Möbius の帶の境界になつてないような非有向 Lefschetz ファイバー空間を相対的極小な Lefschetz ファイバー空間という. 任意の Lefschetz ファイバー空間は適切にプローダウンを行うことで, Lefschetz ファイバー空間の構造を壊すことなく相対的極小にすることができる.

### 3.2 閉曲面の写像類群, Dehn ツイスト, リフトについて

$S_g$  の (向きを保つ) 自己微分同相写像全体の集合をアイソトピックで割った集合は, 写像の合成によって群を成す. この群を  $S_g$  の写像類群といい,  $\mathcal{M}(S_g)$  で表すことにする.

$c$  を  $S_g$  上の (アニュラス型の) 単純閉曲線,  $\nu c$  を  $c$  の  $S_g$  における管状近傍とする.  $\nu c$  の外側は何も動かさず,  $\nu c$  を 3 次元 Euclid 空間に向きを保って取り出し, 右回りに  $2\pi$  ひねり, 再び  $S_g$  に向きを保って埋め戻すような写像は,  $S_g$  における (向きを保つ) 自己微分同相写像である (図 2). この微分同相写像のアイソトピー類を  $t_c \in \mathcal{M}(S_g)$  で表し,  $c$  に沿った右手系 Dehn ツイストという.

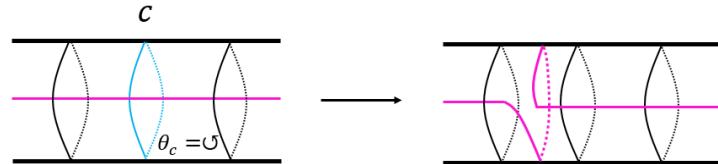


図 2:  $c$  に沿った右手系 Dehn ツイスト.

ただし,  $S_g = N_g$  のときに  $c$  に沿って Dehn ツイストを行う際には,  $\nu c$  の向きを定めてから Dehn ツイストを行う必要がある.  $\nu c$  の向きを明示的に表して Dehn ツイストを行いたい場合は,  $\theta_c$  を  $c$  の管状近傍の向きとして,  $t_{c;\theta_c}$  と表すことがある.

次に,  $\Sigma_{g-1}$  の各点をその対蹠点へと写す写像  $J : \Sigma_{g-1} \rightarrow \Sigma_{g-1}$  を考える. 各点  $p \in \Sigma_{g-1}$ において  $p \sim J(p)$  によって生成される最小の同値関係 ‘~’ で  $\Sigma_{g-1}$  を割ることで, 商写像  $\tilde{J} : \Sigma_{g-1} \rightarrow \Sigma_{g-1} / \sim = N_g$  が得られるが, もし, 微分同相写像  $\Psi : \Sigma_{g-1} \rightarrow \Sigma_{g-1}$  が  $\Psi \circ J = J \circ \Psi$  を満たすなら, 微分同相写像  $\Psi' : N_g \rightarrow N_g$  で,  $\tilde{J} \circ \Psi = \Psi' \circ \tilde{J}$  を満たすものが存在する. このとき,  $\Psi$  を  $\Psi'$  のリフトという.

**補題 3.1** ([4], [18]).  $g \geq 3$  とする. このとき,  $\eta([\omega]) := [\tilde{\omega}]$  によって定まる写像  $\eta : \mathcal{M}(N_g) \rightarrow$

$\mathcal{M}(\Sigma_{g-1})$  は单射群準同型である. なお,  $\tilde{\omega} : \Sigma_{g-1} \rightarrow \Sigma_{g-1}$  は自己微分同相写像  $\omega : N_g \rightarrow N_g$  の向きを保つリフトである.

### 3.3 Lefschetz ファイバー空間のモノドロミー

以下, 本項を通して,  $f : X \rightarrow \Sigma$  を種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間,  $y$  を  $f$  の正則値とし,  $f$  は  $n$  個の臨界値  $y_1, \dots, y_n$  をもつと仮定する. いま, これらに対して次のような性質を満たす  $\Sigma$  上の滑らかな単純曲線  $\mu_i : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  ( $i = 1, \dots, n$ ) をとる (図 3 参照):

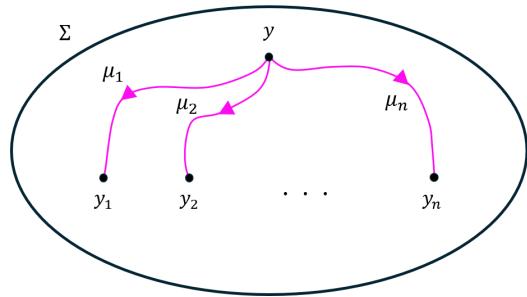


図 3: Hurwitz 系の取り方の例.



図 4:  $\mu_i$  に関するメリディアンループ.

- 各  $i = 1, \dots, n$  に対して,  $\mu_i(0) = y, \mu_i(1) = y_i, \mu_i([0, 1]) \subset \Sigma - \Delta_f$ .
- $i \neq j$  なら,  $\mu_i([0, 1]) \cap \mu_j([0, 1]) = \{y\}$ .
- 点  $y$  を中心とする半径が十分小さい  $\Sigma$  内の円周を反時計回りに一周するとき, 単純曲線は  $\mu_1, \dots, \mu_n$  の順に現れる.

このような単純曲線の列  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  を  $f : X \rightarrow \Sigma$  の **Hurwitz 系** という. また, Hurwitz 系  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  に対して, さらに次のような性質を満たす滑らかな単純閉曲線  $a_i : [0, 1] \rightarrow \Sigma - \Delta_f$  ( $i = 1, \dots, n$ ) をとる (図 4 参照):

- $a(0) = a(1) = y$
- 各  $i = 1, \dots, n$  において,  $a_i$  は  $y_i$  の十分近くを反時計回りに回るような  $\mu_i$  に沿ったループ.

各  $i = 1, \dots, n$  に対して, 上のような  $a_i$  およびそのホモトピー類  $[a_i] \in \pi_1(\Sigma - \Delta_f, y)$  を  $\mu_i$  に関する  $f : X \rightarrow \Sigma$  の **メリディアンループ** という.

Lefschetz ファイバー空間  $f : X \rightarrow \Sigma$  に対して, その正則ファイバーと閉曲面の間の微分同相写像を 1 つ固定することで, 点  $y$  を基点とする基本群  $\pi_1(\Sigma - \Delta_f, y)$  から  $S_g$  の写像類群  $\mathcal{M}(S_g)$  への群準同型写像

$$\rho_f : \pi_1(\Sigma - \Delta_f, y) \rightarrow \mathcal{M}(S_g)$$

が得られる. この群準同型写像を  $f : X \rightarrow \Sigma$  の **モノドロミー表現** という (モノドロミー表現の定義は, 例えば [15], [20], [21] を参照されたい). メリディアンループのモノドロミー表現による像は次の定理のようになる.

**定理 3.2.**  $\rho_f : \pi_1(\Sigma - \Delta_f, y) \rightarrow \mathcal{M}(S_g)$ ,  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  をそれぞれ種数  $g$  の Lefschetz ファイバー空間  $f : X \rightarrow \Sigma$  のモノドロミー表現, Hurwitz 系とする. 各  $i = 1, \dots, n$  に対して,  $a_i$  を  $\mu_i$  に関する  $f : X \rightarrow \Sigma$  のメリディアンループ,  $c_i \subset S_g$  を  $\mu_i$  から定まる  $f : X \rightarrow \Sigma$  の消滅サイクルとするとき,  $a_i$  のホモトピー類  $[a_i] \in \pi_1(\Sigma - \Delta_f, y)$  の  $\rho_f$  による像は,  $S_g$  における  $c_i$  に沿った Dehn ツイストに一致する. なお,  $S_g = \Sigma_g$  の場合, この Dehn ツイストは, 消滅サイクルが正の臨界点へと潰れるとき +1 乗, 負の臨界点へと潰れるときは -1 乗となる. また,  $S_g = N_g$  の場合, この Dehn ツイストが +1 乗, または -1 乗であるかは, 消滅サイクルの管状近傍の向きの取り方に依存する.

**注意 3.3.** 主結果の 1 つである命題 5.2 の証明での途中の議論から, 非有向 Lefschetz ファイバー空間の消滅サイクルはすべてアニュラス型であることが分かる. よって, 定理 3.2 の Dehn ツイストは非有向 Lefschetz ファイバー空間の場合においても問題なく定義される.

以下, 本項の残りでは  $\Sigma$  は  $\mathbb{D}^2$ , または  $\mathbb{S}^2$  のいずれかであるとする.  $f : X \rightarrow \Sigma$ , 点  $y \in \Sigma - \Delta_f$  を本項冒頭のようにとり, 正則ファイバーと  $S_g$  の同一視を 1 つ固定する. また,  $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \{1, -1\}$  とする.  $f : X \rightarrow \Sigma$  の Hurwitz 系  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  をとることで,  $\mu_i$  から定まる  $f : X \rightarrow \Sigma$  の消滅サイクル  $c_i \subset S_g$ , および  $\mu_i$  に関する  $f : X \rightarrow \Sigma$  のメリディアンループ  $\alpha_i \in \pi_1(\Sigma - \Delta_f, y)$  が得られる ( $i = 1, \dots, n$ ).  $\Sigma = \mathbb{D}^2$  のとき,  $\pi_1(\mathbb{D}^2 - \Delta_f, y)$  におけるループの積  $\alpha_1 \cdots \alpha_n \in \pi_1(\mathbb{D}^2 - \Delta_f, y)$  は  $\mathbb{D}^2$  の境界のホモトピー類  $[\partial\mathbb{D}^2] \in \pi_1(\mathbb{D}^2 - \Delta_f, y)$  に一致するので, 定理 3.2 により  $\mathcal{M}(S_g)$  における等式

$$\rho_f([\partial\mathbb{D}^2]) = t_{c_1}^{\zeta_1} \cdots t_{c_n}^{\zeta_n}$$

を得る. また,  $\Sigma = \mathbb{S}^2$  のとき,  $[\partial\mathbb{D}^2] = 1$  であるから, 上の等式の左辺が  $\mathcal{M}(S_g)$  の単位元であるような等式が得られる. いま得た 2 つの等式の右辺にある Dehn ツイストの積をそれぞれ円板上, 球面上の Lefschetz ファイバー空間  $f : X \rightarrow \Sigma$  のモノドロミー分解という. ここまで議論とは逆に, 次も成り立つ.

**定理 3.4.**  $c_1, \dots, c_n$  を  $S_g$  上の (アニュラス型) 単純閉曲線とする. このとき, 種数  $g$  の円板上の Lefschetz ファイバー空間で, その消滅サイクルが  $c_1, \dots, c_n$  となるものが存在する. さらに, もしこの  $c_1, \dots, c_n$  が  $\mathcal{M}(S_g)$  において

$$t_{c_1}^{\zeta_1} \cdots t_{c_n}^{\zeta_n} = 1$$

を満たすとき, 種数  $g$  の球面上の Lefschetz ファイバー空間で, その消滅サイクルが  $c_1, \dots, c_n$  となるものが存在する.

本項の最後に, 非有向 Lefschetz ファイバー空間のモノドロミー分解に関して注意しておく. 定理 3.4 により,  $\mathcal{M}(N_g)$  における Dehn ツイストの積を準備することで, 我々はその Dehn ツイストの積をモノドロミー分解にもつ非有向な Lefschetz ファイバー空間を構成することができるが, このモノドロミー分解の Dehn ツイストは, 各単純閉曲線の管状近傍の向きを調節することで, すべて +1 乗にことができる. このように表示されたモノドロミー分解を, 正のモノドロミー分解という.

## 4 Lefschetz ファイバー空間の同型

**定義 4.1.** 2つの Lefschetz ファイバー空間  $f_1 : X_1 \rightarrow \Sigma$ ,  $f_2 : X_2 \rightarrow \Sigma$  が同型であるとは, 微分同相写像  $H : X_1 \rightarrow X_2$ , および向きを保つ微分同相写像  $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$  で,  $f_2 \circ H = h \circ f_1$  を満たすものが存在するときをいう. ただし,  $f_1 : X_1 \rightarrow \Sigma$ ,  $f_2 : X_2 \rightarrow \Sigma$  が有向なら,  $H : X_1 \rightarrow X_2$  は向きを保つ写像であるとする.

Kas[12], および松本幸夫氏[15]は, 次の定理のように, 2つの有向 Lefschetz ファイバー空間が同型であるための必要十分条件をモノドロミー分解の言葉で記述した.

**定理 4.2** ([12], [15]). 各  $i = 1, 2$  に対し,  $f_i : X_i \rightarrow \Sigma$  を種数  $g$  の円板, または球面上の相対的極小な有向 Lefschetz ファイバー空間とする. ただし,  $\Sigma = \mathbb{S}^2$  のとき,  $g$  は 2 以上であると仮定する. このとき,  $f_1$  と  $f_2$  が同型であることは, それらのモノドロミー分解が次の 3つの変換で移り合うことと同値である:  $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \{1, -1\}$  に対して,

(HE1)

(HE1-1)

$$t_{c_1}^{\zeta_1} \dots t_{c_i}^{\zeta_i} t_{c_{i+1}}^{\zeta_{i+1}} t_{c_{i+2}}^{\zeta_{i+2}} \dots t_{c_n}^{\zeta_n} \\ \leftrightarrow t_{c_1}^{\zeta_1} \dots t_{c_i}^{\zeta_i} t_{c_{i+1}}^{\zeta_{i+1}} (t_{c_i}^{-\zeta_i} t_{c_i}^{\zeta_i}) t_{c_{i+2}}^{\zeta_{i+2}} \dots t_{c_n}^{\zeta_n};$$

(HE1-2)

$$t_{c_1}^{\zeta_1} \dots t_{c_{i-1}}^{\zeta_{i-1}} t_{c_i}^{\zeta_i} t_{c_{i+1}}^{\zeta_{i+1}} \dots t_{c_n}^{\zeta_n} \\ \leftrightarrow t_{c_1}^{\zeta_1} \dots t_{c_{i-1}}^{\zeta_{i-1}} (t_{c_{i+1}}^{\zeta_{i+1}} t_{c_{i+1}}^{-\zeta_{i+1}}) t_{c_i}^{\zeta_i} t_{c_{i+1}}^{\zeta_{i+1}} \dots t_{c_n}^{\zeta_n};$$

(HE2) 向きを保つ自己微分同相写像  $\sigma : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  に対して

$$t_{c_1}^{\zeta_1} \dots t_{c_n}^{\zeta_n} \leftrightarrow t_{\sigma(c_1)}^{\zeta_1} \dots t_{\sigma(c_n)}^{\zeta_n}.$$

## 5 主結果について

本節では筆者が得た結果を紹介するが, その前に 1つ用語を準備しておく.

$M$  を滑らかな  $m$  次元多様体とし,  $\text{ob}(T_p M)$  を点  $p \in M$  における接空間  $T_p M$  の順序つき基底全体の集合とする.  $T_p M$  の 2つの順序つき基底がそれから定まる基底変換行列の行列式が正であるとき同値であると定めることで,  $\text{ob}(T_p M)$  に同値関係 ‘~’ が定まり, 特に, 商集合  $\text{ob}(T_p M) / \sim$  が得られる. いま集合  $\widetilde{M}$  を

$$\widetilde{M} := \{(p, o_p) \mid p \in M, o_p \in (\text{ob}(T_p M) / \sim)\}$$

と定め, 写像  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  を任意の  $(p, o_p) \in \widetilde{M}$  に対して

$$\pi(p, o_p) := p$$

により定める. このとき,  $\pi$  は向き付け二重被覆写像であり, 本稿ではこれを標準的な向き付け二重被覆写像とよぶことにする.

非有向 Lefschetz ファイバー空間の向き付け二重被覆は次の命題 5.1 のようになり, さらにその消滅サイクルについて, 命題 5.2 が成り立つ.

**命題 5.1.** (好川 [19]).  $f : X \rightarrow \Sigma$  を種数  $g$  の非有向 Lefschetz ファイバー空間,  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  を標準的な向き付け二重被覆写像とする. このとき,  $f \circ \pi : \tilde{X} \rightarrow \Sigma$  は正の臨界点と負の臨界点と同じ数だけもつ種数  $g - 1$  のアキラルな Lefschetz ファイバー空間である.

**命題 5.2.** (好川 [19]).  $f : X \rightarrow \Sigma$  を種数  $g$  の非有向 Lefschetz ファイバー空間,  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  を標準的な向き付け二重被覆写像とする. このとき, 種数  $g - 1$  のアキラルな Lefschetz ファイバー空間  $f \circ \pi : \tilde{X} \rightarrow \Sigma$  の消滅サイクルは,  $f : X \rightarrow \Sigma$  の消滅サイクルの  $\pi$  による逆像である. 特に,  $f \circ \pi : \tilde{X} \rightarrow \Sigma$  の消滅サイクルは  $\Sigma_{g-1}$  上において対蹠的な位置関係にあるペアとして出現する (図 5 参照).

非有向 Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーとその向き付け二重被覆から得られる Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーは, 補題 3.1 にて定められている单射群準同型によって次のように関係づけられる.

**命題 5.3.** (好川 [19]).  $f : X \rightarrow \Sigma$  を種数  $g$  の非有向 Lefschetz ファイバー空間,  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  を標準的な向き付け二重被覆写像,  $\eta : \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma_{g-1})$  を補題 3.1 にて定められている单射群準同型とする. このとき,  $g \geq 3$  に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\rho_{f \circ \pi} = \eta \circ \rho_f.$$

$c$  を  $N_g$  上のアニュラス型単純閉曲線,  $\nu c$  を  $c$  の  $N_g$  における管状近傍とし,  $\nu c$  の向きを 1 つ固定する. このとき,  $\tilde{J}^{-1}(\nu c)$  は直和な 2 つの単純閉曲線  $\tilde{J}^{-1}(c)$  の直和な管状近傍であり, しかも, この直和な管状近傍には異なる向きが定まる. そこで,  $\gamma$  を  $\tilde{J}^{-1}(c)$  を構成する単純閉曲線のうち,

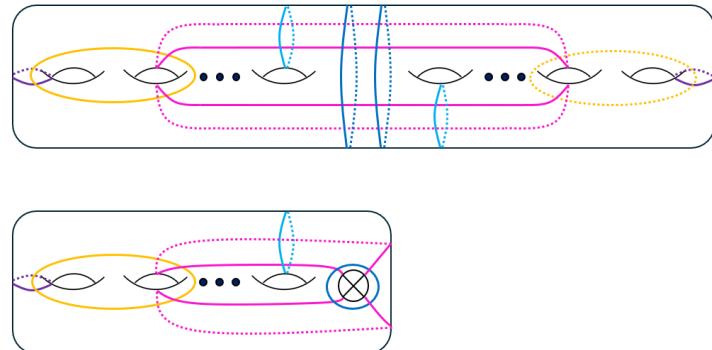


図 5: 種数  $g$  の非有向 Lefschetz ファイバー空間  $f : X \rightarrow \Sigma$  の消滅サイクル (下) と, 種数  $g - 1$  のアキラルな Lefschetz ファイバー空間  $f \circ \pi : \tilde{X} \rightarrow \Sigma$  の消滅サイクル (上). なお, この図では  $g$  は奇数である.

その管状近傍の向きがはじめに定めた  $\nu c$  の向きと一致するものとするとき,  $\tilde{J}^{-1}(c)$  を構成するもう一方の単純閉曲線を  $\bar{\gamma}$  と表すことにする. この約束のもと, 命題 5.3, および定理 3.2 から次の系が従う.

**系 5.4.** (好川 [19]).  $g$  を 3 以上の整数とし,  $f: X \rightarrow \Sigma$  を正のモノドロミー分解  $t_{c_1; \theta_{c_1}} \cdots t_{c_n; \theta_{c_n}}$  をもつ種数  $g$  の非有向 Lefschetz ファイバー空間とする. また, 各  $i = 1, \dots, n$  に対し,  $\gamma_i \amalg \bar{\gamma_i}$  を直前で行った議論のように  $\theta_{c_i}$  から定まる  $\tilde{J}$  による  $c_i$  の逆像とする. このとき, 種数  $g-1$  のアキラルな Lefschetz ファイバー空間  $f \circ \pi: \tilde{X} \rightarrow \Sigma$  のモノドロミー分解は

$$t_{\gamma_1} t_{\bar{\gamma_1}}^{-1} \cdots t_{\gamma_n} t_{\bar{\gamma_n}}^{-1}$$

によって与えられる.

系 5.4 によって, 非有向な Lefschetz ファイバー空間のモノドロミー分解を有向な Lefschetz ファイバー空間のモノドロミー分解へと持ち上げ, さらに定理 4.2 を適用することで, 次の定理が得られる.

**定理 5.5.** (好川 [19]). 円板または球面上の種数 3 以上の 2 つの相対的極小な非有向 Lefschetz ファイバー空間が同型であるための必要十分条件は, それらの正のモノドロミー分解が次の 3 つの変換で移り合うことである:

(i-1)

$$\begin{aligned} & t_{c_1; \theta_{c_1}} \cdots t_{c_i; \theta_{c_i}} t_{c_{i+1}; \theta_{c_{i+1}}} t_{c_{i+2}; \theta_{c_{i+2}}} \cdots t_{c_n; \theta_{c_n}} \\ \leftrightarrow & t_{c_1; \theta_{c_1}} \cdots t_{c_i; \theta_{c_i}} t_{c_{i+1}; \theta_{c_{i+1}}} (t_{c_i; \theta_{c_i}}^{-1} t_{c_i; \theta_{c_i}}) t_{c_{i+2}; \theta_{c_{i+2}}} \cdots t_{c_n; \theta_{c_n}}; \end{aligned}$$

(i-2)

$$\begin{aligned} & t_{c_1; \theta_{c_1}} \cdots t_{c_{i-1}; \theta_{c_{i-1}}} t_{c_i; \theta_{c_i}} t_{c_{i+1}; \theta_{c_{i+1}}} \cdots t_{c_n; \theta_{c_n}} \\ \leftrightarrow & t_{c_1; \theta_{c_1}} \cdots t_{c_{i-1}; \theta_{c_{i-1}}} (t_{c_{i+1}; \theta_{c_{i+1}}}^{-1} t_{c_{i+1}; \theta_{c_{i+1}}}) t_{c_i; \theta_{c_i}} t_{c_{i+1}; \theta_{c_{i+1}}} \cdots t_{c_n; \theta_{c_n}}; \end{aligned}$$

(ii) 自己微分同相写像  $\omega: N_g \rightarrow N_g$  に対して

$$t_{c_1; \theta_{c_1}} \cdots t_{c_n; \theta_{c_n}} \leftrightarrow t_{\omega(c_1); \omega_*(\theta_{c_1})} \cdots t_{\omega(c_n); \omega_*(\theta_{c_n})}.$$

ここで,  $\omega_*(\theta_c)$  は  $\theta_c$  から誘導される  $\omega(c)$  の管状近傍の向きを表す.

定理 5.5 は定理 4.2 の非有向版に相当する.

**謝辞:** 講演の機会を与えてくださった「第 22 回数学総合若手研究集会」の世話人の皆様に心より感謝を申し上げます.

## 参考文献

- [1] S. Akbulut and B. Ozbagci, *Lefschetz fibrations on compact Stein surfaces*, Geom. Topol. **5** (2001), 939–945.

- [2] V. Bais, *Pin<sup>±</sup>-structures on non-oriented 4-manifolds via Lefschetz fibrations*, arXiv:2501.01848.
- [3] R. İ. Baykur and P. Morgan, *On nonorientable 4-manifolds*, arXiv:2506.20950.
- [4] J. S. Birman and D. R. J. Chillingworth, *On the homeotopy group of a non-orientable surface*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **71** (1972), 437–448.
- [5] S. Donaldson, *Lefschetz pencils on symplectic manifolds*, J. Differential Geom., **53** (1999), 205–236.
- [6] H. Endo, *Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations*, Math. Ann., **316** (2000), 237–257.
- [7] H. Endo and Y. Gurtas, *Lantern relations and rational blowdowns*, Proc. Amer. Math. Soc., **138** (2010), 1131–1142.
- [8] H. Endo, T. E. Mark, and J. Van Horn-Morris, *Monodromy substitutions and rational blowdowns*, J. Topol. **4** (2011), 227–253.
- [9] R. Fintushel and R. Stern, *Rational blowdowns of smooth 4-manifolds*, J. Differential Geom., **46** (1997), 181–235.
- [10] E. Giroux and J. Pardon, *Existence of Lefschetz fibrations on Stein and Weinstein domains*, Geom. Topol., **21**(2):963–997, 2017.
- [11] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Grad. Stud. Math., **20**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [12] A. Kas, *On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration*, Pacific J. Math., **89** (1980), 89–104.
- [13] A. Loi and R. Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of  $B^4$* , Invent. Math. **143** (2) (2001), 325–348.
- [14] Y. Matsumoto, *On 4-manifolds fibered by tori II*, Proc. Japan Acad., vol. **59** Ser. A (1983) 100–103.
- [15] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two—a topological approach*, In: Topology and Teichmüller Spaces (Katinkulta, 1995), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996, 123–148.
- [16] M. Miller and B. Ozbagci, *Lefschetz fibrations on nonorientable 4-manifolds*, Pacific J. Math., **312** (2021), no. 1, 177–202.
- [17] B. Ozbagci, *Signatures of Lefschetz fibrations*, Pacific J. Math. **202** (2002), no. 1, 99–118.
- [18] B. Szepietowski, *Embedding the braid group in mapping class groups*, Publ. Mat. **54** (2010), no. 2, 359–368.
- [19] T. Yoshikawa, *Orientation double covers of non-orientable Lefschetz fibrations*, arXiv:2509.06624.
- [20] 遠藤久顕, Lefschetz ファイバー空間, 数学, 第 69 卷, 2017 年.
- [21] 遠藤久顕, 早野健太, 『4 次元多様体とファイバー構造-レフシェツトのトポロジー-』. 共立出版, 2024 年.